2.12 Potenzreihen

1. Definitionen

Der wichtigste Spezialfall von Funktionenreihen sind Potenzreihen.

Eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 ist eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Entwicklungspunkt

Es gilt: es gibt eine Zahl r, der Konvergenzradius, mit $0 \le r \le \infty$, so daß für $|x-x_0| < r$ die Reihe konvergiert und für $|x-x_0| > r$ die Reihe divergiert. Das Intervall $]x_0-r, x_0+r[$ heißt Konvergenzintervall, im komplexen Fall heißt der durch $|z-x_0| < r$ beschriebene Kreis um x_0 mit Radius r Konvergenzkreis. Konvergenzradius Konvergenzintervall Konvergenzkreis

Auf dem Rand des Konvergenzintervalls muß man für die Zahlen mit $|x-x_0| = r$ besondere Untersuchungen anstellen.

Eine Funktion heißt (reell) analytisch in einem offenen Intervall I, falls man sie in jedem Punkt von I in eine konvergente Potenzreihe entwickeln kann. (reell) analytisch

Dazu gehören alle Funktionen, die man aus Polynomen, trigonometrischen, Exponential- und hyperbolischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen durch die Grundrechenarten und Einsetzen erzeugen kann (genauer: in offenen Teilintervallen des jeweiligen Definitionsbereichs), z.B. ist $e^{\sin\ln(x^2+1)}$ reell analytisch. Natürlich können nur unendlich oft differenzierbare Funktionen analytisch sein.

In analytischen Funktionen kann man die reelle Variable x durch die komplexe Variable z ersetzen und erhält eine holomorphe Funktion, vgl. Kapitel 7.

Analytische Funktionen lassen sich stets in Taylorreihen entwickeln und werden im Konvergenzbereich der Taylorreihe durch diese dargestellt.

2. Berechnung

1. Konvergenz von Potenzreihen

Konvergenz

Potenzreihen konvergieren lokal gleichmäßig im Inneren ihres Konvergenzintervalls , d.h. gleichmäßig auf Intervallen $[x_0-a, x_0+a]$, $a < r$.

Die Konvergenz in den Randpunkten muß gesondert untersucht werden. Im Falle der Konvergenz in einem Randpunkt gilt der **Abelsche Stetigkeitssatz**, der besagt, daß die Konvergenz in einer Intervallhälfte gleichmäßig ist, wenn die Reihe auch im Randpunkt konvergiert: Abelscher Stetigkeitssatz

Sei r der Konvergenzradius der Reihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Konvergiert die Reihe im Randpunkt $x_0 + r$ bzw $x_0 - r$ des Konvergenzintervalls, so gilt:

- Die Reihe konvergiert in $[x_0, x_0 + r]$ bzw. $[x_0 - r, x_0]$ gleichmäßig und
- f ist in diesem Intervall stetig.

Quotienten-kriterium

Oft läßt sich der Konvergenzradius mit dem **Quotientenkriterium** berechnen:

Existiert $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, so ist $r \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius.

Achtung! Hier steht der Kehrwert des Bruchs, der im Quotientenkriterium für Reihen auftritt.

Beispiel 1: Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$.

Mit $a_n = \frac{1}{n2^n}$ berechnet man

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = 2\frac{n+1}{n} \to 2.$$

Damit ist $r = 2$, und die Reihe konvergiert für $|x| < 2$ und divergiert für $|x| > 2$. Für $x = -2$ ist es die alternierende harmonische Reihe, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert, für $x = 2$ ist es die divergente harmonische Reihe.

Formel von Cauchy-Hadamard

Immer läßt sich die **Formel von Cauchy-Hadamard** anwenden:

Es ist $r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Dabei wird $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ gesetzt.

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$ ist dabei der obere Limes oder Limes superior der Folge (b_n), der größte Häufungspunkt. Für konvergente Folgen stimmt der obere Limes mit dem Limes überein.

Beispiel 2: Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n\, x^n$

Mit $a_n = \begin{cases} 3^n & n \text{ gerade} \\ 1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$ hat der Quotient $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ abwechseln die Werte $\frac{1}{3^n}$ und 3^n. Damit ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar. $\sqrt[n]{|a_n|}$ hat die Werte 1 und 3, und somit ist der Limes superior (der größte Häufungswert) 3. Damit ist der Konvergenzradius $r = \frac{1}{3}$.

Dabei gilt die allgemeine Regel:

An den Rändern des Konvergenzintervalls liefern die Limesversionen von Wurzel- und Quotientenkriterium keine Aussage.

Man kann höchstens mit den allgemeinen Versionen dieser Kriterien auf Divergenz schließen.

Ist f auf I analytisch, so läßt sich der Konvergenzradius bei der Entwicklung um $x_0 \in I$ auch so bestimmen:
Man betrachtet f als holomorphe Funktion (vgl. Kapitel 7). Der Konvergenzradius ist die Entfernung von x_0 bis zur nächsten Singularität in $\mathbb{C}$.

2. Rechnen mit Potenzreihen

Rechnen mit Potenzreihen

Potenzreihen dürfen gliedweise beliebig oft integriert und differenziert werden. Die integrierten und abgeleiteten Reihen haben denselben Konvergenzradius.
Potenzreihen mit demselben Entwicklungspunkt werden gliedweise addiert.
Für das Produkt gilt die Cauchysche Produktformel:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \text{ mit } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Das bedeutet, daß die Reihen ausmultipliziert und nach Potenzen sortiert werden. Der Konvergenzradius ist mindestens so groß wie der kleinere Konvergenzradius der beiden Faktoren.
Potenzreihen darf man ineinander einsetzen.

3. Konstruktion von Potenzreihen

Konstruktion von Potenzreihen

Es werden mehrere Möglichkeiten vorgestellt, Potenzreihen zu konstruieren. Ein allgemeines Verfahren dazu gibt es nicht, oft ist es aber durch Kombination der einzelnen Verfahren möglich.

3.1 Potenzreihe als Taylorreihe

Ist die zu entwickelnde Funktion analytisch, so stimmen Potenzreihe und Taylorreihe überein und die Entwicklung kann durch die im nächsten Abschnitt beschriebene Taylorentwicklung vorgenommen werden.

3.2 Einsetzen von Reihen

Da man Potenzreihen ineinander einsetzen darf, ist es in einfachen Fällen möglich, dadurch die Reihe einer zusammengesetzten Funktion zu bestimmen.

Beispiel 3: $e^{x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

3.3 Differentiation und Integration

Hier nutzt man aus, daß man Potenzreihen gliedweise integrieren und differenzieren darf.

1. Ermittlung der Reihe zu $f'(x)$.
2. Gliedweise Integration des Ergebnisses. Dabei muß (durch Einsetzen von $x = x_0$) das absolute Glied bestimmt werden.

Beispiel 4: Reihenentwicklung von $f(x) = \ln(1 - \frac{x}{2})$ um $x_0 = 0$.

1. Die Ableitung von f ist eine gebrochen rationale Funktion: $f'(x) = \dfrac{-1/2}{1 - x/2}$.

   Jetzt verwendet man die geometrische Summenformel (s.u.) und erhält

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$$

2. Um die Reihe zu f zu bestimmen, wird gliedweise integriert:

$$\ln(1 - \frac{x}{2}) = f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} + C = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} + C.$$

   Um die Konstante zu bestimmen, wird $x = 0$ eingesetzt: Aus $\ln(1 - 0) = 0$ folgt $C = 0$.

3.4 Reihen gebrochen rationaler Funktionen

Wichtigstes Hilfsmittel ist die Summenformel der geometrischen Reihe:

$$\boxed{\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{für } |q| < 1}$$

Daraus leitet man die für $|x - x_0| < |w - x_0|$ gültigen Formeln her:

$$\frac{1}{x-w} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{(w-x_0)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(x-w)^k} = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} \frac{1}{(w-x_0)^{n+k}} (x-x_0)^n$$

Der Konvergenzradius ist $r = |w - x_0|$.

w darf dabei auch komplex sein. Das Verfahren geht so vor sich:

① Vollständige komplexe Partialbruchzerlegung der Funktion f.

② Der ganzrationale Teil wird in Potenzen von $x - x_0$ umgeschrieben, ev. mit Taylorentwicklung (s.u.) oder Hornerschema, vgl. Kapitel 1.1.

③ Die Partialbrüche werden mit den Formeln oben ersetzt.

④ Zusammenfassen des Ergebnisses.

Beispiel 5: Entwicklung von $\dfrac{x^3+4x}{x^2-4}$ um $x_0 = 1$.

① Es ist $\dfrac{x^3+4x}{x^2-4} = x + \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{4}{x+2}$.

② Hier ist es ganz einfach: $x = (x-1)+1$.

③ Im ersten Bruch ist $w = 2$. Mit $x_0 = 1$ ist $w - x_0 = 1$.

$$\frac{4}{x-2} = -4\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$$

Im zweiten Bruch ist $w = -2$ und damit $w - x_0 = -3$.

$$\frac{4}{x+2} = -4\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}(x-1)^n.$$

④ Da im ganzrationalen Teil die Exponenten null und eins vorkommen, werden diese Glieder aus der Reihe herausgenommen:

$$f(x) \quad = \quad 1 + (x-1) - 4\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n - 4\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}(x-1)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+(x-1)-4-4(x-1)+\frac{4}{3}-\frac{4}{9}(x-1) \\
&\quad +\sum_{n=2}^{\infty}\left(-4-4\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right)(x-1)^n \\
&= -\frac{5}{3}-\frac{31}{9}(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(-4-4\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right)(x-1)^n
\end{aligned}
$$

3. Beispiele

Beispiel 6: Gesucht ist die Entwicklung von $f(x) = \arctan x^2$ um $x_0 = 0$.

Das Problem wird in drei Schritten gelöst: Zuerst wird die Reihe zu $(\arctan x)'$ bestimmt, dann integriert und dann x durch x^2 ersetzt.

1. Bei der Bestimmung der Reihe des Arcustangens benutzt man natürlich $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$. Dies läßt sich mit der Summenformel der geometrischen Reihe umschreiben:

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ für } |q| < 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

2. Integration liefert für $x \in]-1,1[\quad \arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$

   Da die Reihe der Ableitung für $|x| < 1$ konvergiert, ist der Konvergenzradius $r = 1$. Wegen $\arctan 0 = 0$ kommt kein absolutes Glied dazu.

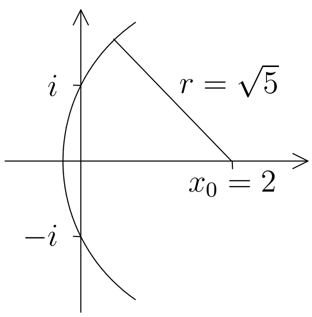
3. Damit ist $\arctan x^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{4n+2} = x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \cdots.$

Beispiel 7: Bestimmung der Konvergenzradien von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

Hier läßt sich in beiden Fällen das Quotientenkriterium verwenden: in der ersten Reihe ist mit $a_n = \dfrac{1}{n!}$ der Konvergenzradius $r = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$ Die Reihe konvergiert also für alle reellen (oder komplexen) Zahlen.

Mit $a_n = n!$ ist in der zweiten Reihe $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Die Reihe konvergiert nur für $x = 0$.

Beispiel 8: Gesucht ist der Konvergenzradius der Reihenentwicklung von $f(x) = \arctan x$ in $x_0 = 2$.



Hier ist der Trick, statt des Arcustangens die Ableitung $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ zu betrachten, die denselben Konvergenzradius hat. f' hat in $\pm i$ Singularitäten, der Abstand zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ ist $\sqrt{5}$. Daher hat auch der Konvergenzradius der Reihe zu f' in x_0 den Wert $\sqrt{5}$, und das ist auch der Konvergenzradius der Reihe zu f.

Beispiel 9: Reihenentwicklung von $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ um $x_0 = 0$.

① $$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}.$$

② Da kein ganzrationaler Teil auftritt, fällt der Schritt weg.

③ Mit $x_0 = 0$ hat liest man ab

$$\frac{1}{x-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{x-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}.$$

Die Reihen konvergieren für $|x| < 3$ und $|x| < 2$. Der gemeinsame Konvergenzbereich ist also das Intervall $]-2, 2[$.

④ $$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right] x^n.$$

Beispiel 10: Potenzreihe von $\dfrac{e^x}{1-x}$

Hier verwendet man die Cauchysche Produktformel, um die bekannten Reihendarstellungen miteinander zu multiplizieren:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Es ist also $a_n = \dfrac{1}{n!}$ und $b_n = 1$ und damit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$. Damit wird

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{1-x} &= 1 + (1+1)x + (1+1+\frac{1}{2})x^2 + (1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})x^3 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) x^n.
\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist 1, da die einzige Singularität in $\mathbb{C}$ bei $x = 1$ liegt. Alternativ lässt sich der Konvergenzradius auch direkt berechnen: Da die Koeffizienten der Produktreihe gegen e konvergieren (es sind ja die Abschnitte der e^x-Reihe für $x = 1$), folgt $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \dfrac{e}{e} = 1$.

Beispiel 11: Reihenentwicklung von $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Die Reihe wird auf drei Arten bestimmt.

Die Formel aus 3.4

Mit $x_0 = 0$, $w = 1$ und $k = 2$ erhält man

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} = (-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} \frac{1}{1^{n+2}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Ableiten der geometrischen Reihe

Ausgangspunkt ist die bekannte Reihe $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Da man Potenzreihen gliedweise ableiten darf, erhält man

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Indextransformation

Jetzt nimmt man eine <u>Indextransformation</u> vor: Mit $m := n-1$ ist $n = m+1$ und die Summe läuft von -1 bis unendlich.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{m=-1}^{\infty} (m+1)x^m.$$

Da für $m = -1$ das Glied $(m+1)x^m$ immer Null ist, läßt man die Reihe bei $m = 0$ beginnen. Gleichzeitig wird m in n umbenannt und man erhält wieder

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

Produkt zweier geometrischer Reihen

Aus der Cauchyschen Produktformel erhält man

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x}\,\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

da in der Formel aus Punkt 2 oben $a_n = b_n = 1$ und damit $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = n+1$ ist.