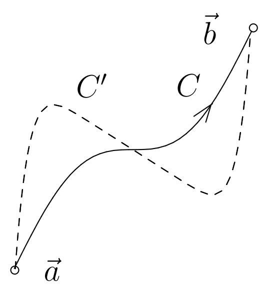
2. Berechnung

Integralsätze in $\mathbb{R}^2$

Hauptsatz für Kurvenintegrale

Hauptsatz für Kurvenintegrale



Ist C eine Kurve mit Anfangspunkt $\vec{a}$ und Endpunkt $\vec{b}$ und f eine stetig differenzierbare Funktion, so ist

$$\boxed{\int_C \operatorname{grad} f(\vec{r})\, d\vec{r} = f(\vec{b}) - f(\vec{a}).}$$

$\operatorname{grad} f(\vec{r})$ kann man natürlich durch $f'(\vec{r})$ ersetzen.

wegunabhängig

Ist C' eine zweite Kurve mit gleichem Anfangspunkt $\vec{a}$ und Endpunkt $\vec{b}$, so ist $\int_C \operatorname{grad} f(\vec{r}\,)\, d\vec{r} = \int_{C'} \operatorname{grad} f(\vec{r}\,)\, d\vec{r}$, das Kurvenintegral ist also <u>wegunabhängig</u>.

Gradientenfeld

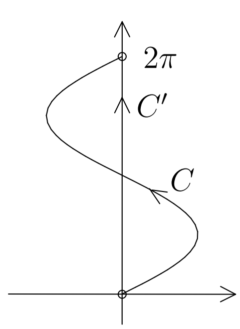
Integrabilitätsbedingung

Ein Kriterium dafür, daß ein gegebenes Vektorfeld $\vec{v}$ ein <u>Gradientenfeld</u> oder <u>Potentialfeld</u> ist, d.h. daß es ein <u>Potential</u> f gibt mit $\vec{v} = \operatorname{grad} f$, ist

<u>Integrabilitätsbedingung</u>: Ist G sternförmiges Gebiet und gilt für das Vektorfeld $\vec{v} = (P, Q)^\top$ die Bedingung $P_y = Q_x$, so gibt es ein Potential f, das nach den Methoden von Kapitel 4.8 berechnet werden kann.

Ist insbesondere $\vec{v}$ ein Potentialfeld und C eine <u>geschlossene</u> Kurve, ist $\int_C \vec{v}\, d\vec{r} = 0$.

<u>Beispiel 1</u>: $\int_C \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} d\vec{r}$ mit der Kurve $C = \{(\sin t, t) | \, 0 \le t \le 2\pi\}$



Die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt:
mit $P = 2xy$ und $Q = x^2 - y^2$ ist $P_y = 2x = Q_x$. Damit gibt es ein Potential f. Mit der Hinguckmethode aus Kapitel 4.8 erkennt man, daß $f(x, y) = x^2 y - \frac{y^3}{3}$ ein Potential ist. Die Kurve C hat den Anfangspunkt $(0, 0)$ und den Endpunkt $(0, 2\pi)$. Damit ist

$$\int_C \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{r} = f(0, 2\pi) - f(0, 0) = -\frac{8}{3}\pi^3.$$

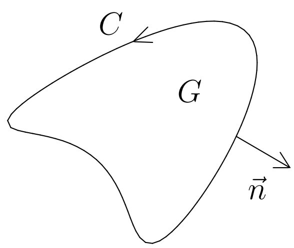
Alternativ läßt sich das auch mit Hilfe der Wegunabhängigkeit des Integrals berechnen: statt über die komplizierte Kurve C zu integrieren, berechnet man das Integral über $C' = \{(0, t) | \, 0 \le t \le 2\pi\}$, also über das Stück der y-Achse zwischen

Anfangs- und Endpunkt. Aus $\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$ und $\vec{\phi}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt

$$\int_{C'} \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = -\frac{8}{3}\pi^3.$$

(Erster) Satz von Gauß, Divergenzsatz

(Erster) Satz von Gauß Divergenzsatz



Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit Randkurve C und äußerem Normalenvektor $\vec{n}$. $\vec{v}$ sei ein Vektorfeld.

$$\boxed{\int_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}\, ds = \int_G \operatorname{div} \vec{v}\, d(x,y).}$$

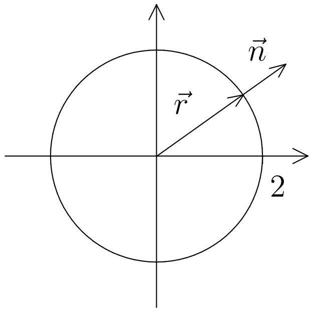
Eine andere Schreibweise für das Integral auf der linken Seite ist $\int_C \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{n}$, vgl. Abschnitt 3. Die Divergenz von $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ist $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_1 + \frac{\partial}{\partial y} v_2 = v_{1x} + v_{2y}$. Divergenz

In Anwendungen wird die Divergenz als Quellenstärke des Vektorfeldes betrachtet. Dann hat der Gaußsche Satz die Interpretation

Der Fluß des Vektorfelds durch die Randkurve des Gebiets ist gleich dem Integral der Quellstärke im Inneren.

Ist insbesondere die Divergenz des Vektorfelds null, verschwindet das Integral über jede geschlossene Kurve.

Beispiel 2: Der Fluß von $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch den Rand des Kreises mit Radius 2 um den Ursprung.



Der Normalenvektor, der senkrecht auf der Kreislinie steht, hat dieselbe Richtung wie der Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Da dieser Vektor den Betrag zwei hat, erhält man $\vec{n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Den Kreis parametrisiert man natürlich wie in 5.3 mit $\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$ und

$|\vec{\phi}_t| = 2$. Dann wird mit $\int \cos^4 t\,dt = \frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t$

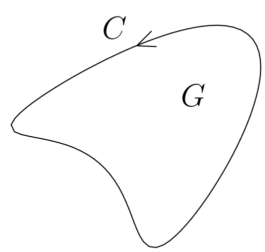
$$\int\limits_C \vec{v}\,d\vec{n} = \int\limits_C \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,ds = \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 8\cos^3 t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} 2\,dt = \int\limits_0^{2\pi} 16\cos^4 t\,dt = 12\pi.$$

Mit dem Gaußschen Satz berechnet man $\operatorname{div}\vec{v} = 3x^2 + 0 = 3x^2$ und damit $\int\limits_C \vec{v}\,d\vec{n} = \int\limits_K 3x^2\,d(x,y)$. Unter Verwendung von Polarkoordinaten ist dieses Integral

$$\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} 3r^2\cos^2\varphi \cdot r\,dr\,d\varphi = 3\frac{r^4}{4}\Big|_0^2 \Big(\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big)\Big|_0^{2\pi} = 3\cdot 4\cdot \pi = 12\pi.$$

Satz von Green oder **Zweiter Satz von Gauß**

Satz von Green
(Zweiter) Satz von Gauß

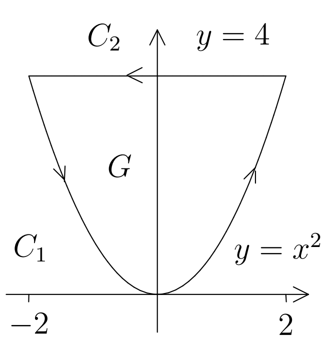


Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit Randkurve C, $P(x,y)$ und $Q(x,y)$ seien stetig differenzierbare Funktionen. Dann ist

$$\boxed{\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\limits_G (Q_x - P_y)\,d(x,y).}$$

Mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ schreibt man das auch als $\int\limits_C \vec{v}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int\limits_G (v_{2x} - v_{1y})\,d(x,y)$.

Beispiel 3: $\int\limits_{\partial G} (e^x - y)\,dx + (\sin y + x)\,dy$. Dabei ist G das Gebiet zwischen den Graphen von $y = x^2$ und $y = 4$.



Die Randkurve C besteht aus den beiden Teilen C_1 und C_2. Der Teil C_1 läßt sich parametrisieren mit $\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ mit $-2 \le t \le 2$.

Statt mit C_2 läßt sich einfacher mit der Kurve $-C_2$ arbeiten: $\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $-2 \le t \le 2$.

Beim Berechnen des entsprechenden Kurvenintegrals wird die Regel $\int\limits_{-C} = -\int\limits_C$ angewandt.

Das Kurvenintegral berechnet sich nun als

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{C_1} (P\,dx + Q\,dy) - \int\limits_{-C_2} (P\,dx + Q\,dy)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-2}^{2} \Big[(e^t - t^2)\cdot 1 + (\sin t^2 + t)(2t)\Big]\,dt - \int_{-2}^{2} \Big[(e^t - 4)\cdot 1 + (\sin 4 + t)\cdot 0\Big]\,dt \\
&= \int_{-2}^{2} (e^t - t^2 + 2t\sin t^2 + 2t^2 - e^t + 4)\,dt = \Big[\frac{t^3}{3} - \cos t^2 + 4t\Big]_{-2}^{2} \\
&= \frac{16}{3} + 16 = \frac{64}{3}
\end{aligned}
$$

Mit dem zweiten Satz von Gauß erhält man $P_y = -1$ und $Q_x = 1$ und damit

$$
\begin{aligned}
\int_C P\,dx + Q\,dy &= \int_G (Q_x - P_y)\,d(x,y) = \int_G (1 - (-1))\,d(x,y) \\
&= \int_{x=-2}^{2} \int_{y=x^2}^{4} 2\,dy\,dx = \int_{x=-2}^{2} 8 - 2x^2\,dx \\
&= \Big[8x - \frac{2}{3}x^3\Big]_{-2}^{2} = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}.
\end{aligned}
$$

Sektorformel

Sektorformel

Im Spezialfall $Q = \frac{x}{2}$ und $P = -\frac{y}{2}$ erhält man $Q_x - P_y = 1$. Damit läßt sich die Fläche des Gebiets als Integral über die Randkurve berechnen:

$$
\mathrm{Vol}\,(G) = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx.
$$

Natürlich kann man auch andere Vektorfelder mit dieser Eigenschaft verwenden, z.B. $Q = x$ und $P = 0$ oder $Q = 0$ und $P = -y$.

Beispiel 4: Der Flächeninhalt des Gebiets G aus Beispiel 3.

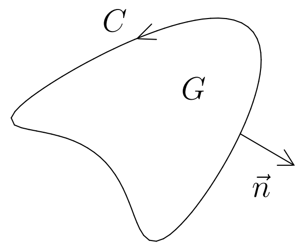
Mit den oben angegebenen Parametrisierungen erhält man

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{Vol}\,(G) &= \int_{C_1} (x\,dy - y\,dx) - \int_{-C_2} (x\,dy - y\,dx) \\
&= \int_{-2}^{2} [(t\cdot 2t - t^2\cdot 1) - (-4\cdot 1)]\,dt \\
&= \int_{-2}^{2} t^2 + 4\,dt = \Big[\frac{t^3}{3} + 4t\Big]_{-2}^{2} = \frac{64}{3}.
\end{aligned}
$$

und damit $\mathrm{Vol}\,(G) = \dfrac{32}{3}$.

Satz von Green, Greensche Formel

Greensche Formel
Satz von Green



Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit Randkurve C und äußerem Normalenvektor $\vec{n}$, g und h seien zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Dann ist

$$\boxed{\int_C \Big(g\frac{\partial h}{\partial \vec{n}} - h\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\Big)\, ds = \int_G (g\,\Delta h - h\,\Delta g)\, d(x,y).}$$

Dabei ist Δ der Laplaceoperator, $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ und $\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ die Richtungsableitung von g in Richtung $\vec{n}$, also $\frac{\partial g}{\partial \vec{n}} = \operatorname{grad} g \cdot \vec{n}$.

Es ist $\int_C \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds$ der Fluß des Vektorfeldes $\operatorname{grad} g$ durch die Kurve C, also

$$\int_C \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = \int_C \operatorname{grad} g\, d\vec{n}.$$

Spezialfälle

Zwei Spezialfälle:

Für $h(x,y) \equiv 1$ ist $\int_C \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = \int_G \Delta g\, d(x,y)$.

Ist g eine harmonische Funktion, also $\Delta g = 0$, so ist $\int_C \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = 0$.

Beispiel 5: Das Integral von $\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ über den Rand R des Einheitskreises K für $g = x^2 + y^2$.

Genau wie in Beispiel 2 ist der Normalenvektor im Punkt (x, y) des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$ wieder $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Daraus folgt

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{n}} = \operatorname{grad} g \cdot \vec{n} = (2x, 2y)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 2y^2 = 2.$$

Damit ist $\int_R \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = \int_R 2\, ds = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$.

Andererseits ist $\Delta g = 2 + 2 = 4$ und $\int_K \Delta g\, d(x,y) = 4\mathrm{Vol}\ (K) = 4\pi$.