1.9 Eigenwerte und Eigenvektoren

Alles in diesem Abschnitt bezieht sich auf quadratische reelle oder komplexe $n \times n$-Matrizen.

Statt E_n ($n \times n$-Einheitsmatrix) wird kurz E geschrieben.

1. Definitionen

Eigenwerte und Eigenvektoren

Ist A eine Matrix, so heißt $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ charakteristisches Polynom von A. Eine (komplexe) Zahl λ heißt Eigenwert(EW) von A, wenn λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

charakteristisches Polynom

Ist λ Eigenwert von A und $\vec{x}$ ein Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$, so heißt $\vec{x}$ Eigenvektor EV von A zum Eigenwert λ.

Eigenwert EW

Eigenvektor EV

Das bedeutet, daß $\vec{x} \neq \vec{0}$ genau dann Eigenvektor zum Eigenwert λ ist, wenn gilt

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Ist λ k-fache Nullstelle von p, so ist $o(\lambda) = k$ die algebraische Vielfachheit von λ.

algebraische und geometrische Vielfachheit

Die geometrische Vielfachheit oder Vielfachheit $\nu(\lambda)$ ist die Dimension des Kerns von $A - \lambda E$, also die Dimension des Eigenraums von A zu λ.

Eigenraum

Andere Bezeichnungen: Manchmal sagt man Ordnung statt algebraischer Vielfachheit und Vielfachheit statt geometrischer Vielfachheit.

Ist λ Eigenwert von A, so ist $1 \leq \nu(\lambda) \leq o(\lambda) \leq n$. Im Fall $\nu(\lambda) < o(\lambda)$ existieren zu λ Hauptvektoren (HV) höherer Stufe.

Hauptvektor HV

Ein Vektor $\vec{x}$ heißt Hauptvektor k-ter Stufe zu λ, wenn gilt

$$(A - \lambda E)^k\vec{x} = \vec{0}, \quad \text{aber} \quad (A - \lambda E)^{k-1}\vec{x} \neq \vec{0}.$$

Wegen $(A - \lambda E)^0\vec{x} = E\vec{x} = \vec{x}$ sind die Eigenvektoren gerade die Hauptvektoren erster Stufe. Ist $\vec{x}$ Hauptvektor k-ter Stufe, so ist $(A - \lambda E)\vec{x}$ Hauptvektor $(k-1)$-ster Stufe.

Der Hauptraum ist der Spann aller Hauptvektoren. Seine Dimension ist $o(\lambda)$, d.h. es gibt insgesamt soviele l.u. Hauptvektoren wie die Nullstellenordnung von λ.

Hauptraum

Insbesondere gilt bei einer einfachen Nullstelle des charakteristischen Polynoms: Es gibt einen eindimensionalen Eigenraum und keine Hauptvektoren höherer Stufe.

diagonalisierbar

Eine reelle Matrix heißt (reell) diagonalisierbar, wenn

i) das charakteristische Polynom nur reelle Nullstellen hat

ii) für jede Nullstelle algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

Das bedeutet, daß der $\mathbb{R}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren von A hat bzw. daß es keine Hauptvektoren höherer Stufe gibt.

Entsprechen heißt eine komplexe Matrix (komplex) diagonalisierbar, wenn für jede Nullstelle die geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

Spektrum

Das Spektrum von A ist die Menge der Eigenwerte $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, die Resolventenmenge ist $\rho(A) = \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$. Ist $\lambda \in \rho(A)$, so heißt die dann existierende Matrix $(A - \lambda E)^{-1}$ Resolvente.

orthogonal

Eine Matrix heißt orthogonal, wenn ihre Spalten ein Orthonormalbasis bilden; d.h. die Skalarprodukte verschiedener Spalten sind stets Null und der Betrag jedes Spaltenvektors ist eins. Äquivalent dazu ist

$$A^\top = A^{-1} \qquad \text{oder} \qquad A^\top A = A\,A^\top = E_n.$$

unitär

Im komplexen Fall heißt eine Matrix unitär, wenn gilt

$$A^* = A^{-1} \qquad \text{oder} \qquad A^*\,A = A\,A^* = E_n.$$

Die Bedeutung orthogonaler und unitärer Matrizen liegt darin, daß für beliebige Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ und einer orthogonalen oder unitären Matrix A gilt

$$|A\vec{v}\,| = |\vec{v}\,| \qquad \text{und} \qquad (A\vec{v}, A\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$$

Eine orthogonale Transformation ändert also Winkel und Längen nicht.

Symmetrische Matrizen und quadratische Formen

quadratische Form

Eine quadratische Form auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung der Form

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \to Q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, x_j$$

Die c_{ij} sind dabei reelle Zahlen mit $c_{ij} = c_{ji}$. Mit der symmetrischen Matrix $C = (c_{ij})_{i,j=1\dots n}$ schreibt sich das als

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^\top C\vec{x},$$

Andersherum ist Q die zu C gehörende quadratische Form. Die Untersuchung quadratischer Formen ist wichtig bei der Untersuchung von lokalen Extrema von Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, vgl. Kapitel 4.5. Dort ist die symmetrische Matrix durch die Hessematrix einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion gegeben. In diesem Abschnitt findet man auch weitere Kriterien und Rechenmethoden zur Untersuchung der Definitheit einer quadratischen Form oder Matrix, z.B. das Hurwitz-Kriterium.

Eine symmetrische Matrix heißt genau dann positiv/negativ (semi)definit oder indefinit, falls das für die entsprechende quadratische Form gilt.

Die quadratische Form heißt — Definitheit

positiv definit , wenn für $\vec{x} \neq \vec{0}$ stets $Q(\vec{x}) > 0$ ist
$\Leftrightarrow$ für alle Eigenwerte λ von C ist $\lambda > 0$.

positiv semidefinit , wenn für stets $Q(\vec{x}) \geq 0$ ist
$\Leftrightarrow$ für alle Eigenwerte λ von C ist $\lambda \geq 0$.

negativ definit , wenn für $\vec{x} \neq \vec{0}$ stets $Q(\vec{x}) < 0$ ist
$\Leftrightarrow$ für alle Eigenwerte λ von C ist $\lambda < 0$.

negativ semidefinit , wenn für stets $Q(\vec{x}) \leq 0$ ist
$\Leftrightarrow$ für alle Eigenwerte λ von C ist $\lambda \leq 0$.

definit , falls Q negativ oder positiv definit ist.

indefinit , falls es $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gibt mit $Q(\vec{x}) < 0 < Q(\vec{y})$
$\Leftrightarrow$ die Matrix C hat positive und negative EW.

(Gefährliche) Schreibweise: C positiv definit: $C > 0$, C positiv semidefinit: $C \geq 0$, C negativ (semi)definit: $C < 0$ ($C \leq 0$). — Schreibweise

2. Berechnung

Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Grundsätzlich geht man so vor:

1. Aufstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$
2. Ermittlung der Eigenwerte als Nullstellen von p (Hornerschema)
3. Zu jedem EW werden die zugehörigen EV bestimmt (Gaußalgorithmus).
4. Falls bei einem EW λ die geometrische kleiner als die algebraische Vielfachheit ist, kann man Hauptvektoren bestimmen.

zu ①: Aufstellen des charakteristischen Polynoms

Das charakteristische Polynom wird als Determinante derjenigen Matrix berechnet, die entsteht, wenn in A von den Hauptdiagonalelementen jeweils λ abgezogen wird. Im allgemeinen lohnen sich Umformungen mit den Zeilen oder Spalten nur selten: zwar kann man sich kleinere Zahlen beim Rechnen erzeugen, dafür nimmt die Anzahl der λ in der Matrix aber zu. Hat man eine Zeile oder Spalte mit vielen Nullen, lohnt sich (wie immer) Entwickeln. Wenn man Produkte nicht sofort ausmultipliziert, kann man manchmal im nächsten Schritt Rechnungen einsparen.

Kontrolle

Als Alternative oder zur Kontrolle kann man benutzen: p hat immer die Form

$$p(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\mathrm{spur}\ A\,\lambda^{n-1} + \cdots + \det A.$$

Spur

Die Spur einer Matrix A (spur A) ist die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen.

Für $n = 2$ und $n = 3$ ist das ausgeschrieben:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{spur}\ A\,\lambda + \det A \qquad (n = 2)$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \mathrm{spur}\ A\,\lambda^2 - c_2\lambda + \det A \qquad (n = 3)$$

c_2 ist für $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$ definiert als $c_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix}.$

Beispiel 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{spur}\ A = 1 + 3 + 5 = 9,\ c_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 5 + 15 = 15,$$

$$\det A = 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -25 \quad \text{und damit} \quad p(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda - 25.$$

Wenn man will, stellt man lieber die Nullstellen von $-p$ fest (da $-p(\lambda)$ mit $+\lambda^3$ beginnt), rät (da die Summe der Koeffizienten bei den geraden und ungeraden Potenzen beidesmal 16 ist) die Nullstelle $\lambda_1 = -1$ und dividiert mit dem Hornerschema:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & 15 & 25 \\ \hline -1 & - & -1 & 10 & -25 \\ \hline & 1 & -10 & 25 & 0 \end{array}$$

Das Restpolynom $\lambda^2 - 10\lambda + 25$ hat die doppelte Nullstelle $\lambda_{2,3} = 5$. Es ist also

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 5.$$

Einfacher ist es so: Beim Ausrechnen von $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$ entwickelt man nach der letzten Zeile und erhält mit der p-q-Formel

$$p(\lambda) = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = -(\lambda+1)(\lambda-5)^2$$

zu ② : Ermittlung der Eigenwerte

Hat man in ① $p(\lambda)$ bestimmt, sucht man wie in Abschnitt 1 beschrieben die Nullstellen. Hilfsmittel ist oft das Hornerschema.

Bei einigen Matrizen geht es schneller, da man ① und ② in einem Schritt erledigen kann:

Ist A eine Diagonalmatrix oder eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix, so stehen die Eigenwerte von A in der Hauptdiagonalen.

zu ③ : Bestimmung der Eigenvektoren

Ist λ ein EW von A, so sind die EV die Elemente aus dem Kern von $A - \lambda E$, die nicht der Nullvektor sind. Gesucht sind also Lösungen des homogenen LGS

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}.$$

Die Bestimmung erfolgt in der Regel mit den Gaußschen Eliminationsverfahren. Die Dimensions des Lösungsraums ist mindestens eins und höchstens so groß wie $o(\lambda)$, die algebraische Vielfachheit von λ.

Zum Abschluß empfiehlt es sich, eine Probe zu machen: Man rechnet die Gleichung $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ nach. Dabei kann man so vorgehen: Man schreibt alle gefundenen EV nebeneinander in eine Matrix B und berechnet AB. Die Spalten dieser Produktmatrix müssen dann die Form "Eigenwert $*$ Eigenvektor" haben; d.h. es müssen die entsprechenden Vielfachen der Spalten von B sein. Probe

Beispiel 1: Fortsetzung

Zu $\lambda_1 = -1$ bildet man $A - \lambda_1 E = A + E$ und bestimmt den Kern:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus liest man einen EV $(1, -1, 0)^\top$ ab.

Zu $\lambda_{2,3} = 5$ rechnet man analog mit $A - 5E$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $A - 5E$ der Rang zwei hat, gibt es also nur einen eindimensionalen Eigenraum, obwohl $\lambda = 5$ doppelter Eigenwert ist. Einen EV liest man als $(1, 2, 0)^\top$ ab.

Die Probe macht man für beide EV gleichzeitig mit dem Falk-Schema:

$$\begin{array}{rccc|cc l} & & & & 1 & 1 & \\ & & & & -1 & 2 & \leftarrow \text{ Eigenvektoren} \\ & & & & 0 & 0 & \\ \cline{2-6} & 1 & 2 & 3 & -1 & 5 & \\ \text{Matrix } A \rightarrow & 4 & 3 & -2 & 1 & 10 & \leftarrow \text{ Eigenwert} * \text{Eigenvektor} \\ & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & \end{array}$$

zu 4: Bestimmung von Hauptvektoren

Diesen Schritt braucht man nur, wenn die algebraische Vielfachheit $o(\lambda)$, also die Nullstellenordnung von λ, größer ist als die geometrische Vielfachheit $\nu(\lambda)$, also die Dimension des Eigenraums zu λ.

Man bestimmt nun nacheinander die Hauptvektoren zweiter, dritter usw. Stufe, bis die Dimension des verallgemeinerten Hauptraums $o(\lambda)$ ist.

Hauptvektoren höherer als erster Stufe sind nie eindeutig bestimmt. Das liegt daran, daß für einen HV $\vec{v}$ k-ter Stufe und einen HV $\vec{w}$ kleinerer als k-ter Stufe die Linearkombination $\vec{v} + \alpha\vec{w}$ ein HV k-ter Stufe ist.

1. Bilde $(A - \lambda E)^2$ und bestimme den Kern. Der besteht genau aus dem Spann der EV (HV 1. Stufe) und der HV 2. Stufe. Man ergänzt nun eine Basis des Eigenraums zu einer Basis des Hauptraums zweiter Stufe ergänzen.

   Die ergänzenden Vektoren sind HV 2. Stufe

2. Wenn man noch nicht genug HV hat, bildet man $(A - \lambda E)^3$, bestimmt den Kern und ergänzt eine Basis des Kerns von $(A - \lambda E)^2$ zu einer von $(A - \lambda E)^3$. Die ergänzenden Vektoren sind HV 3. Stufe.

3. Nach demselben Verfahren werden sukzessive weiter Hauptvektoren bestimmt. Das Verfahren bricht spätestens nach dem $o(\lambda)$-sten Schritt ab.

Die Basisergänzung in 1 und 2 kann man umgehen, indem man HV sucht, die auf den bereits gefundenen HV kleinerer Stufe senkrecht stehen und daher von ihnen l.u. sind:

① Bilde $B = (A - \lambda E)^2$ und ergänze B um Zeilen, die aus den bereits gefundenen HV 1. Stufe (den EW) besteht.

Der Kern der so erweiterten Matrix besteht aus HV 2. Stufe.

② Bilde $B = (A - \lambda E)^3$ und ergänze B um Zeilen, die aus den bereits gefundenen HV 1. und 2. Stufe besteht.

Der Kern der so erweiterten Matrix besteht aus HV 3. Stufe.

Beispiel 1: Fortsetzung

Da $\nu(5) = 1$ und $o(5) = 2$ ist, braucht man nur einen HV zweiter Stufe.

① Zunächst bildet man $B = (A - 5E)^2 = \begin{pmatrix} 24 & -12 & -16 \\ -24 & 12 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Da der Rang von B offensichtlich eins ist, hat der Kern nach der Dimesionsformel (S. 65) die Dimension zwei. Wenn man jetzt den Kern von B bestimmt, benutzt man clevererweise, daß man schon weiß, daß der EV $v_1 = (1, 2, 0)^\top$ im Kern liegt. Ein zweiter davon linear unabhängiger Vektor im Kern ist z.B. $\vec{v}_2 = (2, 0, 3)$, und das ist der gesuchte Hauptvektor.

Bei der alternativen Methode muß man mehr rechnen und weniger denken:

① In der Matrix B oben läßt man die zweite und dritte Zeile weg und ergänzt um die Zeile $(1, 2, 0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 24 & -12 & -16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -60 & -16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & ^4/_{15} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -^8/_{15} \\ 0 & 1 & ^4/_{15} \end{pmatrix}$$

Daraus liest man $(^8/_{15}, -^4/_{15}, 1)^\top$ oder $(8, -4, 15)$ als HV ab.

Besonderheiten bei reellen Matrizen

- Da auch reelle Polynome nichtreelle Nullstellen haben können, kann eine reelle Matrix A auch nichtreelle komplexe EW haben. In diesem Fall kann man zu A komplexe EV bestimmen.
- Ist $\lambda = a + ib$ einen nichtreeller EW, so ist auch $\overline{\lambda} = a - ib$ EW, und zwar mit derselben algebraischen und geometrischen Vielfachheit wie λ.
- Ist $\vec{x}$ EV zum nichtreellen EW $\lambda = a + ib$, so ist $\overline{\vec{x}}$ Ev zu EW $\overline{\lambda} = a - ib$.

Beispiel 2: Eigenwerte und -vektoren von $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

① Es ist $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 6\lambda + 10.$
Alternativ:

$$\operatorname{spur} A = 6, \quad \det A = 10 \quad \Rightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 10$$

② Die p-q-Formel gibt $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$.

③ Da A eine reelle Matrix ist, braucht man nur zu einem der EW einen EV zu bestimmen, da man den anderen durch komplexes Konjugieren erhält. Da $A - \lambda E$ gebildet wird und man mit positivem Realteil meist leichter rechnet, wird ein EV zu $\lambda_2 = 3 - i$ bestimmt.

$$A - \lambda_2 E = A - (3-i)E = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -2 & -1+i \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile ist das $(-1+i)$-fache der ersten Zeile und kann weggelassen werden. Aus der ersten Zeile liest man einen Eigenvektor $\vec{v}_2 = (1, -1-i)^\top$ ab.

Damit ist $\vec{v}_1 = (1, -1+i)^\top$ EV zum EW $\lambda_1 = 3 + i$.

Besonderheiten bei symmetrischen und hermiteschen Matrizen

- Symmetrische und hermitesche Matrizen haben stets nur reelle Eigenwerte.
- Für jeden EW stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.
- Eigenvektoren zu verschiedenen EW stehen senkrecht aufeinander.
- Es gibt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren.

  Das bedeutet, daß diese Matrizen immer diagonalisierbar sind und daß sich jeder Vektor in der Basis der EW entwickeln läßt.
- Schiefsymmetrische und schiefhermitesche Matrizen haben stets rein imaginäre EW, d.h. der Realteil ist immer null. Ist die Raumdimension ungerade, so haben (reelle) schiefsymmetrische Matrizen immer null als EW und sind damit nicht invertierbar.
- Ist A eine symmetrische [hermitesche] Matrix, so gibt es eine ONB aus Eigenvektoren. Faßt man diese zu einer Matrix C zusammen, so ist C eine orthogonale [unitäre] Matrix, d.h. es ist $CC^\top = E_n$ $[CC^* = E_n]$. Es ist

  $$C^\top A\, C = C^{-1}\, A\, C = D, \quad [C^*\, A\, C = C^{-1}\, A\, C = D]$$

  wobei D eine Diagonalmatrix ist, die auf der Hauptdiagonale die EW von A enthält.

Eigenschaften des Spektrums

Ist A eine Matrix mit den Eigenwerten λ_1, $\lambda_2 \ldots$, so gilt:

- Die Eigenwerte von $A + \mu E$ sind $\lambda_1 + \mu$, $\lambda_2 + \mu \ldots$
- Die Eigenwerte von αA sind $\alpha\lambda_1$, $\alpha\lambda_2, \ldots$
- Die Eigenwerte von A^k, $k \in \mathbb{N}$ sind λ_1^k, λ_2^k, ...
- A invertierbar $\quad\Leftrightarrow\quad$ 0 ist kein Eigenwert von A.

  In diesem Fall gilt die letzte Aussage auch für $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere hat A^{-1} die Eigenwerte $\frac{1}{\lambda_1}$, $\frac{1}{\lambda_2}$, ...
- Weder für die Eigenwerte von $A + B$ noch für die von AB gibt es einfache Regeln.

Beispiel 3: Eigenwerte und -vektoren von $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

1 und 2 Es ist

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 2)(\lambda - 7)$$

und damit $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 7$.

3 Zu $\lambda_1 = 2$ bildet man $A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und liest einen EV $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab.

Einen EV zu $\lambda_2 = 7$ kann man analog berechnen. Alternativ kann man auch die Tatsache benutzen, daß bei symmetrischen Matrizen die EV zu verschiedenen EW senkrecht zueinander stehen. Man erhält einen EV zu $\lambda_2 = 7$ als orthogonales Komplement zu $\vec{v}_1$ als $\vec{v}_2 = \vec{v}_1^R = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Normiert man $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ und schreibt sie dann in eine Matrix C, erhält man

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da die Spalten von C ein ONS bilden, ist C eine orthogonale Matrix, also $C^\top = C^{-1}$. Mit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ hat man die Gleichung

$$AC = CD.$$

Diese Gleichung liest man so, wie in Abschnitt 4 beschrieben ist. In C stehen die EV von A. Das Produkt AC ist also spaltenweise das Produkt von A mit seinen EV. Auf der anderen Seite steht das Produkt der Eigenvektormatrix C mit der Diagonalmatrix D. Das ist in Abschnitt 4 bereits als eine Matrix bestimmt worden, deren Spalten aus Vielfachen der Spalten von C besteht, wobei die Faktoren die Diagonalelemente von D sind.

Insgesamt bedeutet die Gleichung also "Matrix mal EV = EW mal EV".

Aus der Orthogonalität von C erhält man nun

$$AC = CD \quad \Leftrightarrow \quad C^{-1}AC = D \quad \Leftrightarrow \quad C^{\top}AC = D.$$

Die vorletzte Gleichung bedeutet nach den in Abschnitt 7 über Basiswechsel gemachten Aussagen, daß die zu A gehörende Abbildung in der Basis, die aus den orthonormierten EW von A besteht, eine besonders einfache Gestalt hat, nämlich durch die Diagonalmatrix D gegeben wird.

Nach all den theoretischen Erklärungen kann man das auch ausrechnen:

$$\begin{aligned} C^{-1}AC &= C^{\top}AC = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -7 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Beispiele

Weitere Beispiele zu Definitheit finden sich in Kapitel 4.4, weitere Beispiele zu Eigenwerten und -vektoren in Kapitel 6.12

Beispiel 4: Eigenwerte und -vektoren von $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

A läßt sich zerlegen in

$$A = B + 2E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der schiefsymmetrische Teil B hat rein imaginäre EW $\pm\mu i$, und, da die Raumdimension ungerade ist, den EW Null.

A hat daher EW der Form $\lambda_{1,2} = 2 \pm \mu$ und $\lambda_3 = 2$.

Diese Vorbemerkung soll als Beispiel für die Verwendung der Rechenregeln für das Spektrum dienen und wird in der folgenden Rechnung nicht benutzt.

① Das charakteristische Polynom wird nach der Sarrus-Regel berechnet.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^3 - 4 + 4 + 4(2-\lambda) + (2-\lambda) + 4(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)^3 + 9(2-\lambda) \end{aligned}$$

Alternativ ist

$$\operatorname{spur} A = 2{+}2{+}2 = 6,\ c_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8{+}8{+}5 = 21$$

$\det A = 8-4+4+8+2+8 = 26$ und damit $p(\lambda) = -\lambda^3+6\lambda^2-21\lambda+26$

② Die EW erhält man durch Faktorisieren von p:

$$p(\lambda) = (2-\lambda)((2-\lambda)^2+9) \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i,\ \lambda_3 = 2.$$

③ Der EV zu $\lambda_3 = 2$ ist ein nichttrivialer Vektor im Kern von $A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Statt des Gauß'schen Eliminationsverfahrens benutzen wir hier den in Abschnitt 5 auf Seite 76 beschriebenen Trick: Der Eigenraum eines einfachen Eigenwerts ist immer eindimensional. Daher hat $A-2E$ nach der Dimensionsformel (S. 65) den Rang zwei und man erhält eine Basis des Kerns als Kreuzprodukt der (offensichtlich linear unabhängigen) ersten beiden Zeilen:

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei der Bestimmung der Eigenvektoren zu den komplexen Eigenwerten spart der Trick noch mehr Rechenarbeit: einen Eigenvektor zu $\lambda_1 = 2+3i$ erhält man so als

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3i \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3i \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6i \\ 2-6i \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Einen Eigenvektor zu $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 2-3i$ erhält man, da A eine reelle Matrix ist, durch Konjugieren von $\vec{v}_1$, also

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2-6i \\ 2+6i \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Bei der Verwendung dieses Tricks wird **dringend** zu einer Probe geraten!

Beispiel 5: Eigenwerte und -vektoren von $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Da es sich um eine obere Dreiecksmatrix handelt, sind die Diagonalelemente die Eigenwerte und es ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$.

Die EV erhält man als nichttriviale Lösungen von $(A+3E)\vec{x} = \vec{0}$. Wegen $A+3E = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind alle EV Vielfache von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es ist also $\nu(-3) = 1$ und $o(-3) = 2$ und es gibt HV 2. Stufe. Da der verallgemeinerte Hauptraum die Dimension 2 haben muß, kann es nur der ganze $\mathbb{R}^2$ sein und man wählt als HV irgendeinen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ l.u. Vektor, z.B. $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 6: Eigenwerte und -vektoren von $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Da A symmetrisch ist, sind sicher alle EW reell.

1. $A - \lambda E$ wird nach der ersten Spalte entwickelt, die entstehenden Determinanten nach der zweiten Spalte:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^2$$

2. Es ist also $\lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_{3,4} = -1$.

3. EV zu $\lambda_{1,2} = 1$ sind Elemente des Kerns von $A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   Man erkennt, daß die erste und dritte und daß die zweite und vierte Zeile linear abhängig sind und man daher nur die ersten beiden Zeilen betrachten muß. Man kann direkt die EV $\vec{v}_1 = (1,0,1,0)^\top$ und $\vec{v}_2 = (0,1,0,1)^\top$ ablesen.

   Analog erhält man zwei l.u. EV zu $\lambda_{3,4} = -1$ als Basis des Kerns von $A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ als $\vec{v}_3 = (1,0,-1,0)^\top$ und $\vec{v}_4 = (0,1,0,-1)^\top$.