

6.3 Exakte Differentialgleichungen

Andere Bezeichnungen:

Pfaffsche Dgl., Dgl. für Kurvenscharen, Nulllinien Pfaffscher Formen.

Pfaffsche Dgl,
Dgl. für
Kurvenscharen

1. Definitionen

Diese Dgl. haben die Form

$$\text{I } P(x, y) + Q(x, y) y' = 0 \quad \text{oder}$$

$$\text{II } P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0.$$

Dabei geht die zweite aus der ersten Form durch formales Erweitern mit dx hervor. Eine Lösung ist im Fall

$$\text{I eine Funktion } y(x), \text{ die die Dgl. erfüllt: } P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x) = 0.$$

II Jetzt gibt es außerdem Lösungskurven, die keine Graphen von Funktionen sind: eine Lösungskurve hat eine Parametrisierung $\phi(t) = (x(t), y(t))^T$, so daß $P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) = 0$ ist. Der Punkt bezeichnet dabei die Ableitung nach t .

Im Fall II ist mit $t = x$ (dann ist $\frac{dx}{dt} = 1$ und $\frac{dy}{dt} = y'$) der Fall I mit enthalten.

Die Dgl. heißt exakt, falls es eine Stammfunktion F mit $F_x = P$ und $F_y = Q$ gibt. Alle Lösungen der Dgl. ergeben sich dann durch Auflösen der Gleichung $F(x, y) = C$, wobei C eine beliebige Konstante ist.

exakte Dgl.,
Stamm-
funktion
integrierender
Faktor,
Eulerscher
Multiplikator

Falls die Dgl. nicht exakt ist, läßt sich manchmal eine Funktion $\mu(x, y)$ finden, so daß die Dgl. $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ exakt ist. Eine solche Funktion μ heißt integrierender Faktor oder Eulerscher Multiplikator.

2. Berechnung

- ① Ist die vorgelegte Dgl. exakt? ($P_y = Q_x$)
Falls nicht: Bestimmung eines Eulerschen Multiplikators.
- ② Bestimmung einer Stammfunktion $F(x, y)$.
- ③ Bestimmung der Lösungen aus $F(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$
Falls ein Multiplikator benutzt wurde:
Test, ob sich die Lösungsmenge geändert hat.
- ④ Ist ein AWP mit $y(x_0) = y_0$ gegeben, so bestimmt sich C durch $F(x_0, y_0) = C$.

Test auf
Exaktheit

zu ①: Kriterium für Exaktheit

- Ist die Dgl. exakt und F zweimal stetig diff'bar, so ist überall $P_y = Q_x$.
- Ist auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet überall $P_y = Q_x$, so gibt es dort eine Stammfunktion. (Sternförmige oder konvexe Gebiete sind einfach zusammenhängend, insbesondere ist das der Fall, wenn die Dgl. auf dem ganzen \mathbb{R}^2 definiert ist.)

Bestimmung eines Eulerschen Multiplikators μ

Bestimmung
eines
Eulerschen
Multiplikators

Falls $P_y = Q_x$ nicht erfüllt ist, macht man einen
Ansatz: $\mu(x, y) P(x, y) dx + \mu(x, y) Q(x, y) dy = 0$ soll exakt sein.
Die Exaktheitsbedingung $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ gibt

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x \quad \Leftrightarrow \quad \mu_y P - \mu_x Q = \mu(Q_x - P_y).$$

Zwei Spezialfälle:

Es gibt einen nur von x abhängenden Multiplikator
 $\Leftrightarrow \mu_y = 0$
 $\Leftrightarrow w := -\frac{Q_x - P_y}{Q}$ hängt nur von x ab
 $\Leftrightarrow \mu(x) = \exp(\int w(x) dx)$ ist integrierender Faktor

$$\mu = \mu(x)$$

Es gibt einen nur von y abhängenden Multiplikator
 $\Leftrightarrow \mu_x = 0$
 $\Leftrightarrow w := \frac{Q_x - P_y}{P}$ hängt nur von y ab
 $\Leftrightarrow \mu(y) = \exp(\int w(y) dy)$ ist integrierender Faktor

$$\mu = \mu(y)$$

Ein Beispiel zur Bestimmung eines integrierenden Faktors, der weder allein von x noch von y abhängt, findet sich bei den Beispielen.

Stamm-
funktion
bestimmen
Hinguck-
methode

zu ②: Bestimmung einer Stammfunktion

Gesucht ist eine Funktion F , deren Gradient das Vektorfeld $(P, Q)^\top$ ist.

Methode 1: Hinguckmethode

F muß einerseits die Form $\int P(x, y) dx$ und andererseits $\int Q(x, y) dy$ haben. Man schreibt beide Ausdrücke hin, streicht doppelt vorkommende Terme einmal heraus und addiert beide Ausdrücke.
Hier muß man unbedingt als Probe $F_x = P$ und $F_y = Q$ nachrechnen!

Methode 2: Mehrfache IntegrationMehrfache
Integration

- ①) $F(x, y) = \int P(x, y) dx + C(y)$
- ②) Diese Gleichung wird nach y abgeleitet und mit $F_y = Q(x, y)$ kombiniert. Daraus wird $C'(y)$ bestimmt.
- ③) $C(y)$ wird bestimmt und in ①) eingesetzt.

Diese Methode hat die Variante, daß die Rollen von x und y vertauscht werden: zunächst wird Q nach y integriert und man erhält F bis auf eine von x abhängende Konstante.

Methode 3: Berechnung durch KurvenintegraleKurveninte-
grale

- Ⓐ $F(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, s) ds$
- Ⓑ $F(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, s) ds$
- Ⓒ $F(x, y) = \int_0^1 \left[P(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) (x - x_0) \right. \\ \left. + Q(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) (y - y_0) \right] dt \\ = (x - x_0) \int_0^1 P(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) dt \\ + (y - y_0) \int_0^1 Q(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) dt$

Dabei entsprechen die drei Varianten jeweils einem Kurvenintegral:

- Ⓐ von (x_0, y_0) über (x, y_0) nach (x, y) ,
- Ⓑ von (x_0, y_0) über (x_0, y) nach (x, y) ,
- Ⓒ von (x_0, y_0) direkt nach (x, y) .

Man hat also darauf zu achten, daß diese Strecken im Definitionsbereich der Dgl. liegen.

Ist ein Anfangswert $y(x_0) = y_0$ gegeben, so liefert diese Methode sofort die Lösung des AWP durch Auflösen von $F(x, y) = 0$. Ist die allgemeine Lösung gesucht, so wählt man den Startpunkt (x_0, y_0) möglichst günstig, d.h. so, daß in einem Integral möglichst viele Terme wegfallen. Oft ist $(x_0, y_0) = (0, 0)$ eine gute Wahl.

Falls man sich entschließt, mit allgemeinem x_0 und y_0 zu rechnen, läßt sich die Stammfunktion so zusammenfassen, daß sich eine Summe von zwei Termen ergibt, von denen der eine nur x und y und der andere nur x_0 und y_0 enthält.

Vergleich der
Methoden**Vergleich der Methoden**

	Vorteil	Nachteil
Methode 1	Schnellste Methode bei einfach gebauten Dgl.	Fehleranfällig bei komplizierteren Rechnungen
Methode 2	einfache Universalmethode	eigentlich keiner
Methode 3	liefert gleich die Lösung des AWP	unnötig komplizierte Rechnungen durch Mitführen der Anfangswerte

Auflösen

zu ③: Auflösen und Kontrolle

Oft läßt sich die Gleichung $F(x, y) = C$ nicht nach y auflösen, so daß man nur eine implizite Lösung erhält.

Kontrolle

Wurde ein Multiplikator μ benutzt, so müssen folgende Kontrollen vorgenommen werden:

- i) Die Lösungen von $\mu(x, y) = 0$ sind Lösungen der modifizierten Dgl. Sind es auch Lösungen der ursprünglichen Gleichung?
- ii) Die Lösungen von $\frac{1}{\mu(x, y)} = 0$ sind eventuell weggefallen. Waren es Lösungen der ursprünglichen Gleichung?

3. Beispiele

Beispiel 1: $(2x + 4y + 2) dx + (4x + 12y + 8) dy = 0, \quad y(0) = -1$

Alternativ zu der folgenden Rechnung läßt sich die Dgl. auch umschreiben in $y' = -\frac{2x + 4y + 2}{4x + 12y + 8}$ und als Dgl. vom Typ 4 aus Abschnitt 2 lösen.

- ① Mit $P = 2x + 4y + 2$ und $Q = 4x + 12y + 8$ ist $P_y = 4 = Q_x$. Die Dgl. ist also exakt.

② **Nach Methode 1 (Hinguckmethode)**

Einerseits muß $F(x, y)$ bei Integration von P nach x wie $x^2 + 4xy + 2x$, andererseits (bei Integration von Q nach y) wie $4xy + 6y^2 + 8y$ aussehen. Der doppelt vorkommende Term $4xy$ wird einmal gestrichen, der Rest wird addiert, also $F(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y$. Die Probe $F_x = P$, $F_y = Q$ geht auf. Fertig.

Nach Methode 2 (Mehrfache Integration)

Integration von P nach x ergibt $F(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + C(y)$.

Ableiten nach y und Vergleich mit Q : $4x + C'(y) = 4x + 12y + 8$, also $C'(y) = 12y + 8$. Mit $C(y) = 6y^2 + 8y$ (es ist ja nur eine Stammfunktion gesucht, deshalb braucht man keine Integrationskonstante) hat man

$$F(x, y) = x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y.$$

Nach Methode 3 (Kurvenintegrale)

Es ist $x_0 = 0$ und $y_0 = -1$.

$$\begin{aligned} \textcircled{A} \quad F(x, y) &= \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, s) ds \\ &= \int_0^x (2t + 4(-1) + 2) dt + \int_{-1}^y (4x + 12s + 8) ds \\ &= (t^2 - 2t)|_0^x + (4xs + 6s^2 + 8s)|_{-1}^y \\ &= x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{B} \quad F(x, y) &= \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, s) ds \\ &= \int_0^x (2t + 4y + 2) dt + \int_{-1}^y (0 + 12s + 8) ds \\ &= (t^2 + 4ty + 2t)|_0^x + (6s^2 + 8s)|_{-1}^y \\ &= x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y + 2. \end{aligned}$$

\textcircled{C} Es ist $x_0 + t(x - x_0) = tx$ und $y_0 + t(y - y_0) = -1 + t(y + 1)$.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (x - x_0) \int_0^1 P(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) dt \\ &\quad + (y - y_0) \int_0^1 Q(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) dt \\ &= x \int_0^1 (2tx + 4(-1 + t(y + 1)) + 2) dt \\ &\quad + (y + 1) \int_0^1 (4tx + 12(-1 + t(y + 1)) + 8) dt \\ &= x(t^2x - 2t + 2t^2(y + 1))|_0^1 + (y + 1)(2t^2x - 4t + 6t^2(y + 1))|_0^1 \\ &= x(x - 2 + 2y + 2) + (y + 1)(2x - 4 + 6(y + 1)) \\ &= x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y + 2. \end{aligned}$$

$\textcircled{3}$ Wurde die Stammfunktion nach Methode 1 oder 2 bestimmt, muß noch die richtige Konstante bestimmt werden. Dazu werden $x = 0$ und $y = -1$

eingesetzt: $F(0, -1) = 6 - 8 = -2$. In jedem Fall erhält man also die Lösung der Dgl. als Auflösung von $x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y + 2 = 0$ bzw. $x^2 + 4xy + 2x + 6y^2 + 8y = -2$. Diese Gleichung läßt sich mit quadratischer Ergänzung in der Form $(x + 2y + 1)^2 + 2(y + 1)^2 = 1$ schreiben. Die Lösungskurve beschreibt also eine Ellipse. Alternativ kann man natürlich auch mit Hilfe der p - q -Formel nach y auflösen.

Beispiel 2: $(xy^2 + xye^x) dx + (2x^2y + xe^x) dy = 0$

Es ist $P(x, y) = xy^2 + xye^x$ und $Q(x, y) = 2x^2y + xe^x$.

- ① Test auf Exaktheit: $P_y = 2xy + xe^x$, $Q_x = 4xy + (x + 1)e^x$. Die Dgl. ist also nicht exakt und ein Multiplikator μ muß bestimmt werden.

Versuch 1: μ hängt nur von y ab.

$$\text{Bilde also } w = \frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{4xy + (x + 1)e^x - 2xy - xe^x}{xy^2 + xye^x} = \frac{2xy + e^x}{xy(y + e^x)}.$$

Da w sich nicht als nur von y abhängender Ausdruck schreiben läßt, gibt es keinen nur von y abhängenden integrierenden Faktor.

Versuch 2: μ hängt nur von x ab.

$$\text{Bilde also } w = -\frac{Q_x - P_y}{Q} = -\frac{4xy + (x + 1)e^x - 2xy - xe^x}{2x^2y + xe^x} = -\frac{2xy + e^x}{x(2xy + e^x)} = -\frac{1}{x}.$$

Da w nur von x abhängt, ist $\mu(x) = \exp\left(\int -\frac{1}{x} dx\right) = \exp(-\ln|x|) = \frac{1}{|x|}$ integrierender Faktor. Mit derselben Begründung wie auf S. ?? nimmt man $\mu = \frac{1}{x}$. Die neue (exakte) Dgl lautet also

$$(y^2 + ye^x)dx + (2xy + e^x)dy = 0.$$

Probe: $P_y = 2y + e^x$, $Q_x = 2y + e^x$, stimmt!

- ② Die Stammfunktion bestimmt man nach der **Hinguckmethode:**
 $F(x, y) = xy^2 + ye^x$.
- ③ Alle Lösungen erhält man aus $xy^2 + ye^x = C$, also für $x \neq 0$ mit der p - q -Formel

$$y = \frac{1}{2x} \left(-e^x \pm \sqrt{e^{2x} + 4Cx} \right)$$

Da die Dgl. mit $\mu = \frac{1}{x}$ multipliziert wurde, muß getestet werden, ob die Lösung $\frac{1}{\mu} = x = 0$, also die y -Achse, weggefallen ist: in der Tat ist mit der Parametrisierung $x(t) = 0$, $y(t) = t$ und damit $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 1$ die ursprüngliche Dgl. erfüllt. Die y -Achse ist also auch eine Lösungskurve.

- ④ fällt weg, da kein Anfangswert gegeben ist.

Beispiel 3: $(2x^2y + y^3) + (x^3 + 2xy^2)y' = 0$.

Hinweis: es gibt einen von $t = xy$ abhängenden integrierenden Faktor.

- ① Es ist $P = 2x^2y + y^3$, $Q = x^3 + 2xy^2$ und damit $P_y = 2x^2 + 3y^2$ und $Q_x = 3x^2 + 2y^2$. Die Dgl. ist also nicht exakt. Laut Hinweis gibt es einen von $t = xy$ abhängenden integrierenden Faktor μ . Zur Bestimmung von μ werden die partiellen Ableitungen nach x und y mit der Kettenregel bestimmt:

$$\mu_x = \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} = \mu' \cdot y, \quad \mu_y = \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} = \mu' \cdot x.$$

Der Strich bezeichnet dabei die Ableitung nach t . Jetzt wird die Bestimmungsgleichung für μ ausgewertet:

$$\begin{aligned} (\mu P)_y &= (\mu Q)_x \\ \mu_y P + \mu P_y &= \mu_x Q + \mu Q_x \\ \mu' x(2x^2y + y^3) + \mu(2x^2 + 3y^2) &= \mu' y(x^3 + 2xy^2) + \mu(3x^2 + 2y^2) \\ \mu'(2x^3y + xy^3 - x^3y - 2xy^3) &= \mu(3x^2 + 2y^2 - 2x^2 - 3y^3) \\ \mu'(x^3y - xy^3) &= \mu(x^2 - y^2) \\ \mu' xy(x^2 - y^2) &= \mu(x^2 - y^2) \\ \mu' &= \frac{1}{xy} \mu \end{aligned}$$

μ löst also die Dgl. $\mu' = \frac{1}{t} \mu$. Eine Lösung ist $\mu(t) = t = xy$. Damit erhält man die neue (exakte) Dgl.

$$(2x^3y^2 + xy^4) + (x^4y + 2x^2y^3)y' = 0.$$

Probe: $P_y = 4x^3y + 4xy^3$, $Q_x = 4x^3y + 4xy^3$ stimmt!

- ② Die Stammfunktion bestimmt sich nach der Hinguckmethode:

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(x^4y^2 + x^2y^4).$$

- ③ Alle Lösungen sind implizit gegeben durch

$$x^4y^2 + x^2y^4 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Hinzugekommen sind eventuell die Lösungskurven $x = 0$ und $y = 0$ (das Achsenkreuz, das für $C = 0$ in der allgemeinen Lösung enthalten ist). Man erkennt, daß die x -Achse, die durch $y = 0$ gegeben ist, schon eine Lösung der Ausgangsgleichung war: man muß ja nur $y = 0$ (und dann natürlich auch $y' = 0$) einsetzen. Die y -Achse ist bei dieser Form der Dgl. (mit y' formuliert) keine Lösung, da sie nicht der Graph einer Funktion ist.

- ④ entfällt, da kein Anfangswert gegeben ist.